Comparer deux moyennes sur des grands échantillons

3 octobre 2016

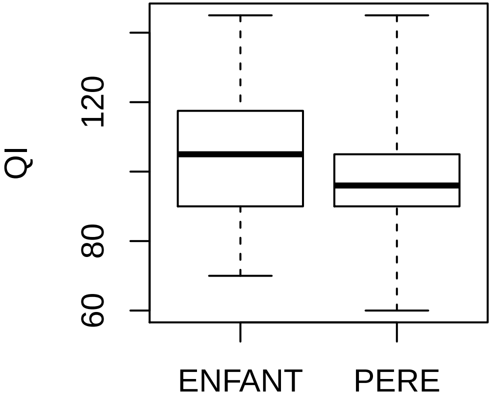
Sommaire

Une première étude

Un pyschologue émet l'hypothèse qu'il y a une différence **en moyenne** entre le QI du père et le QI de ses enfants.

Il sélectionne 39 familles choisies au hasard puis relève le QI du père et le QI d'un des enfants choisi aux hasard :

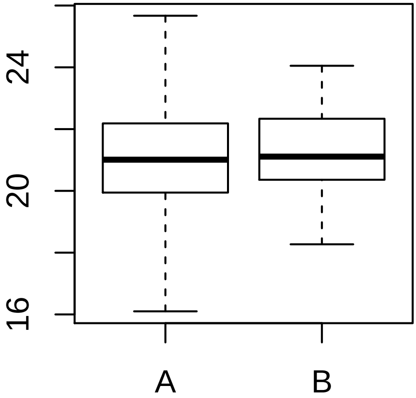
	ENFANT	PERE
échantillon	39.00	39.00
moyenne	104.72	96.46
écart-type	20.37	18.18



Une deuxième étude

Une étude indique que les poissons alimentés avec le régime B ont une meilleure croissance en **moyenne** que des poissons alimentés avec le régime A.
Un pisciculteur alimente 180 avec le régime A et 100 avec le régime B. Il relève au bout d'un certain temps la longueur des poissons et observe :

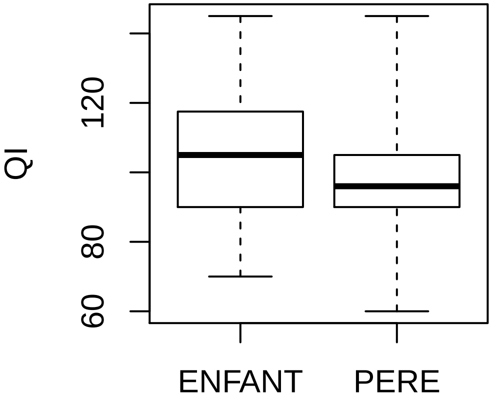
	A	B
échantillon	180.00	100.00
moyenne	21.02	21.30
écart-type	1.70	1.29



Conclusions

Pour la première étude, il est écrit dans un rapport que la première étude met en lumière une différence de QI entre le père et ses enfants.

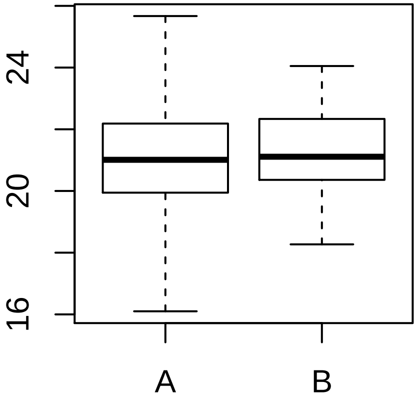
	ENFANT	PERE
échantillon	39.00	39.00
moyenne	104.72	96.46
écart-type	20.37	18.18



Conclusions

Pour la deuxième étude, un rapport indique qu'il n'est pas possible de conclure à une meilleure croissance des poissons avec le régime B.

	A	B
échantillon	180.00	100.00
moyenne	21.02	21.30
écart-type	1.70	1.29



Objectifs du cours

Dans les deux études, les rédacteurs des rapports ont utilisé un logiciel statistique : *R* (https ://www.r-project.org/).

l'objectif du cours est double :

- Apprendre à formaliser une démarche statistique et à conclure à l'aide de sorties de ce logiciel.
- Comprendre comment le logiciel calcule certaines des valeurs présentées sur ces sorties.

Exemple (Sortie *R* pour la première étude)

```
Paired z-test
data: PERE and ENFANT
z= -2.4071 p-value= 0.0161
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval
-14.9791 -1.5338
sample estimates:
   mean of PERE    mean of ENFANT
        96.4615          104.7179
```

Hypothèses

En Statistique, on commence généralement par indiquer le contexte de l'étude (populations et variables concernées par l'étude).

Hypothèses

En Statistique, on commence généralement par indiquer le contexte de l'étude (populations et variables concernées par l'étude).

Étude sur le QI :

Une Population : l'ensemble des familles

Deux variables :

- QI du père de famille
- QI d'un enfant de la famille

Notons μ_{PERE} le QI moyen d'un père et μ_{ENFANT} le QI moyen d'un de ses enfants. L'hypothèse de recherche du psychologue peut alors se reformuler en

$$\mu_{PERE} \neq \mu_{ENFANT}.$$

Hypothèses

Étude sur la croissance des poissons :

Deux Populations :

- Les poissons d'élevage alimentés avec le régime A
- Les poissons d'élevage alimentés avec le régime B

Deux variables :

- Longueur d'un poisson alimenté avec le régime A
- Longueur d'un poisson alimenté avec le régime B

Notons μ_A la longueur moyenne d'un poisson alimenté avec le. régime A et μ_B la longueur moyenne d'un poisson alimenté avec le régime B. L'affirmation de la publicité peut alors se reformuler en

$$\mu_A < \mu_B.$$

Hypothèses

Rappelons maintenant ce qu'on appelle test d'hypothèses.

Définition

Un test d'hypothèse est une démarche consistant à confronter sur un jeu de données (**échantillon**) choisies au hasard **deux** affirmations s'excluant mutuellement et portant sur la distribution de variables, appelées **Hypothèses statistiques**.

Hypothèses

Pour la première étude, nous choisirons de confronter les deux hypothèses statistiques suivantes :

$$« \mu_{PERE} = \mu_{ENFANT} » \quad \text{et} \quad « \mu_{PERE} \neq \mu_{ENFANT} »$$

Point important : les deux hypothèses statistiques confrontées n'ont pas le même statut. L'une est appelée **Hypothèse nulle**, que l'on notera H_0, et l'autre est appelée **Hypothèse alternative**, que l'on notera H_1.

Hypothèses

Pour la première étude, nous choisirons de confronter les deux hypothèses statistiques suivantes :

$$\text{« } \mu_{PERE} = \mu_{ENFANT} \text{ »} \quad \text{et} \quad \text{« } \mu_{PERE} \neq \mu_{ENFANT} \text{ »}$$

Point important : les deux hypothèses statistiques confrontées n'ont pas le même statut. L'une est appelée **Hypothèse nulle**, que l'on notera H_0, et l'autre est appelée **Hypothèse alternative**, que l'on notera H_1.

Mais, Choisir laquelle des deux hypothèses statistiques sera l'hypothèse nulle et laquelle des deux hypothèses statistiques sera l'hypothèse alternative n'est pas neutre. Ce choix conditionne en effet la démarche statistique.

Hypothèses

Pour la première étude, nous choisirons de confronter les deux hypothèses statistiques suivantes :

$$« \mu_{PERE} = \mu_{ENFANT} » \quad \text{et} \quad « \mu_{PERE} \neq \mu_{ENFANT} »$$

Point important : les deux hypothèses statistiques confrontées n'ont pas le même statut. L'une est appelée **Hypothèse nulle**, que l'on notera H_0, et l'autre est appelée **Hypothèse alternative**, que l'on notera H_1.

Mais, Choisir laquelle des deux hypothèses statistiques sera l'hypothèse nulle et laquelle des deux hypothèses statistiques sera l'hypothèse alternative n'est pas neutre. Ce choix conditionne en effet la démarche statistique.

Règle

L'hypothèse nulle sera toujours l'hypothèse d'égalité des deux moyennes dans ce cours.

Quand les deux hypothèses d'un test consistent à comparer deux moyennes, on appelle ce test un **test de comparaison de moyennes**.

Hypothèses

En conclusion, pour la première étude, les deux hypothèses confrontées seront :

$$H_0 : \mu_{PERE} = \mu_{ENFANT}$$
$$H_1 : \mu_{PERE} \neq \mu_{ENFANT}$$

Remarque

Il y a deux autres hypothèses H_1 possibles pour un test de comparaison de moyennes : $\mu_{PERE} > \mu_{ENFANT}$ et $\mu_{PERE} < \mu_{ENFANT}$.

Tandis, que pour la deuxième étude, les deux hypothèses confrontées seront :

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$
$$H_1 : \mu_A < \mu_B$$

Avant de décrire la démarche du test, il est important d'indiquer que notre objectif n'est pas de discuter la validité de H_0 et de H_1 !

En effet, l'objectif d'un test d'hypothèse est de décider de rejeter ou de ne pas rejeter l'hypothèse nulle à l'aide d'un calcul de probabilité.
En l'état, la formalisation du test est incomplète ! Il nous faut fixer une probabilité appelée **seuil de signification**.

Seuil de signification

Pour définir ce que nous appellerons **Seuil de signification**, présentons dans un tableau la nature des décisions selon la validité de l'hypothèse nulle :

		Validité	
		H_0 vrai	H_0 faux
Décision	Ne pas rejeter H_0	Bonne décision	Mauvaise décision
	Rejeter H_0	Mauvaise décision	Bonne décision

Il y a donc deux mauvaises décisions ayant chacune une probabilité propre :

- $\alpha = P_{H_0}(\text{rejeter } H_0) =$ probabilité de rejeter H_0 sachant que H_0 est vraie.
- $\beta =$ « probabilité de ne pas rejeter H_0 sachant que H_0 est fausse ».

Seuil de signification

La philosophie d'un test d'hypothèse est de fixer la valeur de α.

Seuil de signification

La philosophie d'un test d'hypothèse est de fixer la valeur de α.

La valeur de β ne peut pas être fixée si l'on fixe la valeur de α. Elle est est, quant à elle, alors donnée par donnée par l'« expérience » (valeur de α, hypothèses théoriques sur les distributions de variables, tailles des échantillons, etc).

Toutefois, ce que l'on peut dire :

- Diminuer α c'est augmenter β. Le choix de la valeur de α est donc important dans la pratique et ne doit pas se faire au hasard !
- A α fixé, la valeur de β diminue quand on augmente la taille des échantillons.

Attention

α est une probabilité théorique fixée *a priori* !

Seuil de signification

Pour l'étude, la formalisation **complète** du test est :

- QI_{PERE} = QI du père de famille
- QI_{ENFANT} = QI d'un enfant de la famille
- μ_{PERE} = moyenne de QI_{PERE}
- μ_{ENFANT} = moyenne de QI_{ENFANT}.

$$H_0 \ : \mu_{PERE} = \mu_{ENFANT}$$
$$H_1 \ : \mu_{PERE} \neq \mu_{ENFANT}$$

Seuil de signification : 0.05.

On peut aussi écrire qu'on teste $\mu_{PERE} = \mu_{ENFANT}$ contre $\mu_{PERE} \neq \mu_{ENFANT}$ au seuil 0.05.

Seuil de signification

La formalisation complète du test est :

- X_A = longueur d'un poisson alimenté avec le régime A
- X_B = longueur d'un poisson alimenté avec le régime B
- μ_A = moyenne de X_A
- μ_B = moyenne de X_B.

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$
$$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

Seuil de signification : 0.01

Échantillons appariés versus échantillons indépendants

Avant d'aller plus loin il est important de remarquer que les échantillons sont de nature très différentes entre la première et la deuxième étude.

Dans la première étude sur le QI, les deux échantillons de QI sont construits en observant les individus d'une même population : l'individu statistique est la famille et on mesure on mesure le QI de deux membres de la même famille.

Dans la deuxième étude sur la croissance des poissons, les deux échantillons sont issus de population distinctes.

Échantillons appariés versus échantillons indépendants

Ce point est important et nous séparerons donc dans la suite le cas des échantillons dits **indépendants** et des échantillons dits **appariés** :

indépendants : Les deux échantillons sont constitués indépendemment l'un de l'autre.

appariés[1] : Les deux échantillons sont constitués en associant deux par deux les données individuelles : à chaque mesure d'une variable on lui associe une mesure de l'autre variable.

Exemple

Dans la première étude, les deux échantillons sont **appariés** tandis que, dans la deuxième étude, les échantillons sont **indépendants**.

1. Apparier : mettre par paire des objets

Échantillons appariés versus échantillons indépendants

Dans la première étude, les échantillons sont appariés et on parlera alors de test de comparaison de moyennes sur des échantillons appariés. On parlera alors de test de comparaison de moyennes sur des échantillons appariés.

Dans la deuxième étude, les échantillons sont indépendants et on parlera alors de test de comparaison de moyennes sur des échantillons indépendants.

Il est très important de déterminer dans un test de comparaison de moyennes si les échantillons sont indépendants ou appariés !

En plus de préciser les hypothèses et le seuil d'un test de comparaison de moyennes, vous devrez donc préciser la nature des échantillons utilisés dans le test (appariés / indépendants).

Moyenne empirique

Étant donné un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ d'une variable aléatoire X, on appelle moyenne empirique de $(X_1, \ldots, X_n)$ la variable aléatoire $\bar{X}_n$ définie par :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Notons μ la moyenne de X, rappelons que $\bar{X}_n$ est appelé un estimateur de μ et que $E(\bar{X}_n) = \mu$.

Dans ce cours, au lieu de définir la moyenne empirique relativement à un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, on écrira pour désigner la moyenne empirique relative à un échantillon d'une variable X : « soit $\bar{X}_n$ la moyenne empirique de X sur les échantillons de taille n »

Moyenne empirique

Exemple (Première étude)

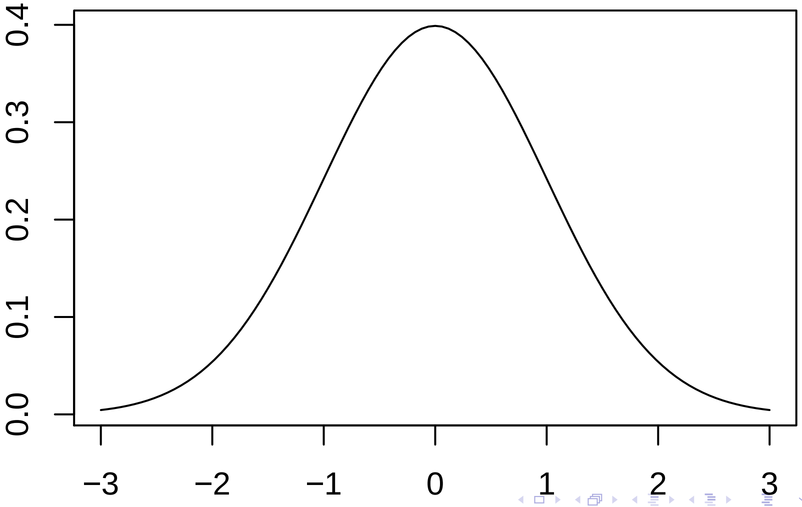
On notera $\overline{QI_{PERE}}$ la moyenne empirique de QI_{PERE} observée sur les échantillons de taille 39 et notons $\overline{QI_{ENFANT}}$ la moyenne empirique de QI_{ENFANT} observée sur les échantillons de taille 39.

Exemple (Deuxième étude)

On notera $\overline{X_A}$ la moyenne empirique de X_A observée sur **les** échantillons de taille 180 et $\overline{X_B}$ la moyenne empirique de X_B observée sur les échantillons de taille 100.

Moyenne empirique

La moyenne empirique $\bar{X}_n$ d'une variable X est une variable aléatoire ayant une certaine distribution :



Estimation ponctuelle

On appelle estimation ponctuelle d'une moyenne μ d'une variable X toute moyenne calculée à partir d'une série d'observations provenant d'un échantillon de X.

Exemple

A l'aide du logiciel *R*, on calcule pour chacun des échantillons de la première étude sa taille, la moyenne et l'écart-type observés.

```
             ENFANT  PERE
échantillon   39.00 39.00
moyenne      104.72 96.46
écart-type    20.37 18.18
```

Une estimation ponctuelle de μ_{PERE} sur un échantillon de taille 39 est donc 96.46 tandis qu'une estimation ponctuelle de μ_{ENFANT} sur un échantillon de taille 39 est 104.72.

Attention

L'écart-type observé est la racine carrée de la valeur observée de la variance empirique **biaisée** S_n^2.

Estimation ponctuelle

On appelle estimation ponctuelle d'une moyenne μ d'une variable X toute moyenne calculée à partir d'une série d'observations provenant d'un échantillon de X.

Exemple

A l'aide du logiciel *R*, on calcule pour chacun des échantillons de la deuxième étude sa taille, la moyenne et l'écart-type observés.

```
                  A      B
échantillon 180.00 100.00
moyenne      21.02  21.30
écart-type    1.70   1.29
```

Une estimation ponctuelle de μ_A sur **un** échantillon de taille 180 est donc 21.02 tandis qu'une estimation ponctuelle de μ_B sur un échantillon de taille 100 est 21.3.

Statistique de décision

L'idée du test de comparaison de moyennes présenté dans ce chapitre est de considérer la différence $\bar{D}$ entre les deux moyennes empiriques.

Exemple (Échantillons appariés)

Pour la première étude, on posera $\bar{D} = \overline{QI_{PERE}} - \overline{QI_{ENFANT}}$.
$\bar{D}$ est un estimateur de $\mu_{PERE} - \mu_{ENFANT}$ et est la moyenne empirique de $D = QI_{PERE} - QI_{ENFANT}$.

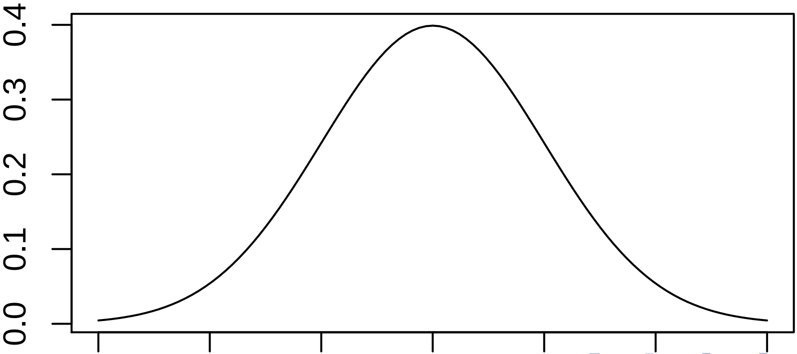
Exemple (Échantillons indépendants)

Pour la deuxième étude, on posera $\bar{D} = \overline{X_A} - \overline{X_B}$.
$\bar{D}$ est un estimateur de $\mu_A - \mu_B$ mais n'est pas la moyenne empirique d'une variable !

Statistique de décision

Sans hypothèses sur les distributions des variables considérées sur la population, on ne connaît généralement pas la distribution de la variable $\bar{D}$.

Toutefois, quand les tailles des échantillons considérés dans une étude sont suffisamment grands, on peut montrer théoriquement que la distribution de $\bar{D}$ convenablement renormalisée –c'est-à-dire divisée par une autre variable –est proche de la distribution d'une loi normale.



Statistique de décision

Échantillons appariés :

Étant donnés deux échantillons appariés associées à deux variables X et Y de taille commune n, posons :

$$T = \frac{\bar{D}}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

où S^2 désigne la variance empirique sans biais de D :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n\bar{D}^2\right)$$

$D_i = X_i - Y_i =$ Différence entre la valeur de X et Y pour le i-ème individu.

Statistique de décision

Échantillons indépendants :

Étant donnée deux échantillons indépendants associés à deux variables X_1 et X_2 de tailles respectives n_1 et n_2, Posons :

$$T = \frac{\bar{D}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

où s_1^2 et s_2^2 désignent, respectivement, les variances empiriques sans biais de X_1 et de X_2 (définies comme la variance empirique de D présentée dans le transparent précédent) .

Statistique de décision

Sans hypothèses sur les distributions des variables testées, la distribution **exacte** de T n'est généralement pas connue sous H_0 !

Quand les tailles des deux échantillons sont toutes les deux supérieures au égales à 30, on peut montrer sans aucune hypothèse sur les distributions des variables que la distribution de T est approximativement la distribution d'une loi normale centrée réduite sous H_0.

On écrira de manière plus concise :

$$T \to \mathcal{N}(0, 1) \text{ sous } H_0$$

De plus, pour tous les calculs de probabilité d'événements associés à T, on notera P_{H_0} la probabilité : $P_{H_0}(T \leq 5)$ se lit « probabilité sous H_0 que T soit inférieure ou égale à 5 ».

Remarque

Si QI_{PERE} et QI_{ENFANT} sont distribués suivant une loi normale de même variance, $T \sim T(n-1)$ où $T(\nu)$ désigne une loi de Student à ν degrés de libertés (*degree of freedom*, en abrégré *df*).

p-valeur

Dans ce cours, nous utiliserons une probabilité *expérimentale* appelée p-valeur pour décider de rejeter ou de ne pas rejette H_0.

Avant d'expliquer ce que représente la p-valeur, nous allons commencer par expliquer comment utiliser sa valeur.

Dans ce cours, nous utiliserons les sorties du logiciel R pour cela.

p-valeur

Pour la première étude, donnons la sortie suivante du logiciel R que vous aurez à utiliser dans ce cours :

```
Paired z-test
data: PERE and ENFANT
z= -2.4071 p-value= 0.0161
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval
-14.9791 -1.5338
sample estimates:
   mean of PERE    mean of ENFANT
        96.4615          104.7179
```

PERE and ENFANT $\to \overline{QI_{PERE}} - \overline{QI_{ENFANT}}$.
La p-valeur est alors la valeur, que l'on notera p, donnée par `p-value= ....`
On lit donc sur la sortie R ci-dessus : $p = 0.0161$.
Sur la sortie, il est aussi indiqué la valeur observée de T sous la forme `z = ...` : $t_{obs} = -2.4071$.

p-valeur

Sortie `PERE and ENFANT` $\neq$ Sortie `ENFANT and PERE`

```
Paired z-test
data: ENFANT and PERE
z= 2.4071 p-value= 0.0161
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval
1.5338 14.9791
sample estimates:
   mean of ENFANT    mean of PERE
         104.7179         96.4615
```

La p-valeur indiquée sur la sortie est la même que pour la sortie du transparent précédent. En revanche, remarquez que la valeur de T est l'opposé de la valeur indiquée sur le transparent précédent !

Règle de décision

La règle de décision basée sur la p-valeur est alors :

- Si $p \geq \alpha$, on ne rejette pas H_0,
- Si $p < \alpha$, on rejette H_0.

α = Seuil de signification du test

Exemple

Pour la première étude, $\alpha = 0.05 > p = 0.0161$ donc on rejette H_0.

Remarque

Si on rejette H_0, on connaît la probabilité de prendre une mauvaise décision qui est égale à $\alpha = P_{H_0}(\text{rejeter } H_0)$.

En revanche, si on ne rejette pas H_0, il faudrait déterminer le risque de deuxième espèce β !

p-valeur

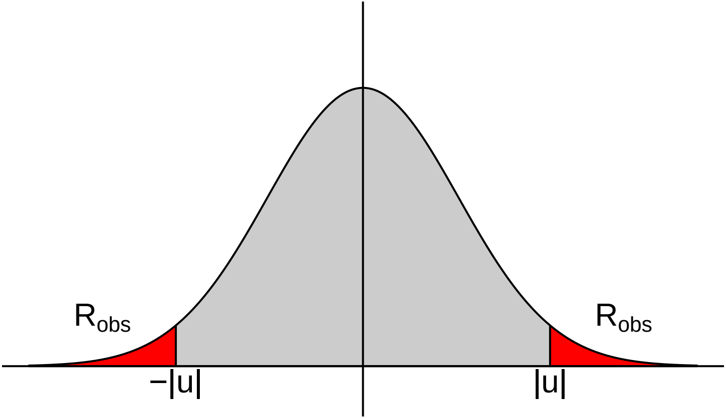
Expliquons maintenant quelle probabilité représente la p-valeur. Pour cela, quelques remarques préliminaires (importantes) :

- Tous les calculs de probabilités sont faits en supposant que l'hypothèse nulle est vraie ce qu'on indique en notant la probabilité P_{H_0}.
- Le calcul de la p-valeur dépend de la forme de l'hypothèse alternative H_1. A chaque hypothèse H_1 il sera associé un calcul différent de p.
- La valeur de p ne dépend que de la loi de T et de sa valeur observée sur les échantillons.

p-valeur

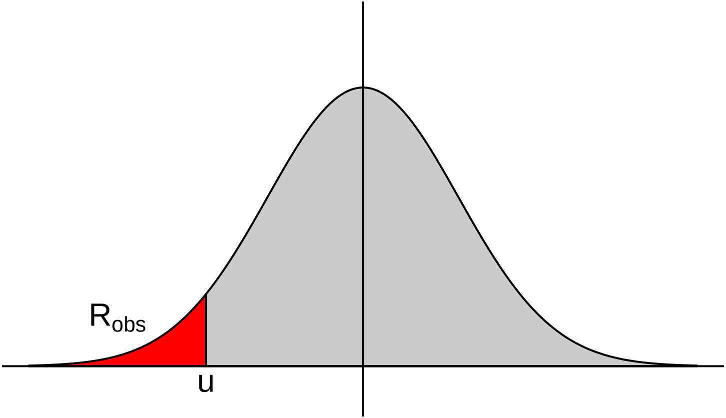
L'idée est de calculer la probabilité p d'une région R_{obs} de $\mathbb{R}$. La forme de la région varie selon la forme de l'hypothèse H_1.

Si $\mu_1 \neq \mu_2$, les valeurs hautement probables de $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ sont les valeurs de $\bar{D}$ grandes en valeur absolue : $p = P(T \leq -|u|) + P(T \geq |u|)$



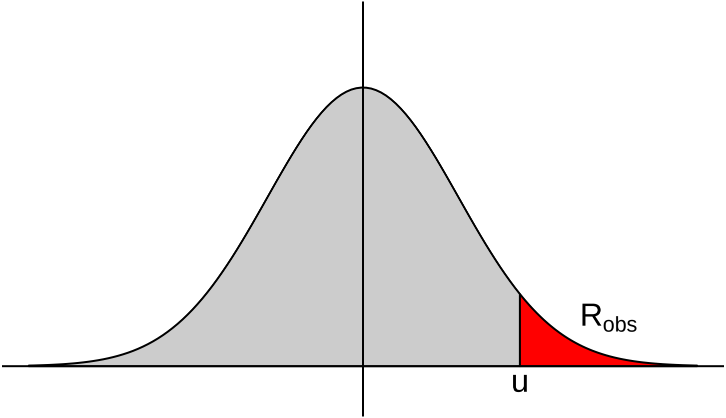
p-valeur

Si $\mu_1 < \mu_2$, les valeurs hautement probables de $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ si H_0 sont les grandes valeurs négatives de $\bar{D}$: $p = P(T \leq u)$



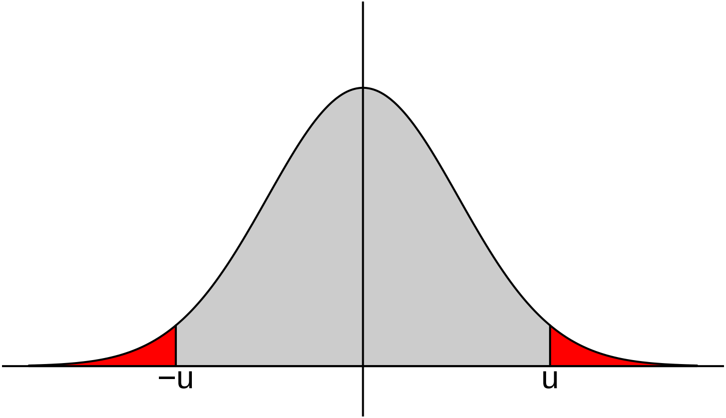
p-valeur

Si $\mu_1 > \mu_2$, les valeurs hautement improbables de $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ sont les grandes valeurs positives de $\bar{D}$: $p = P(T \geq u)$



p-valeur

Rappelons maintenant que la distribution de T est symétrique sous H_0 :



$$P_{H_0}(T \leq -u) = P_{H_0}(T \geq u)$$

p-valeur

Si l'on note t_{obs} la valeur observée de T, la définition de la *p*-valeur est alors selon que H_1 est une hypothèse bilatérale ($\neq$) ou unilatérale ($<>$) : $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$,

$$\mu_1 \neq \mu_2 \ : p = P(T \geq |t_{obs}|) + P_{H_0}(T \leq -|t_{obs}|) = 2P_{H_0}(T \geq |t_{obs}|)$$

$$\mu_1 > \mu_2 \ : p = P_{H_0}(T \geq t_{obs})$$

$$\mu_1 < \mu_2 \ : p = P_{H_0}(T \leq t_{obs}) = P_{H_0}(T \geq -t_{obs})$$

Échantillons appariés

Retrouvons pour la première étude la valeur de T affichée sur la sortie R. Pour cela, calculons la valeur de la variance empirique sans biais de $D = QI_{PERE} - Q_{FILS}$ à l'aide de R : $s^2_{obs} = 458.8273$.

La moyenne observée de D : $\bar{d}_{obs} = 104.7179 - 104.7179 = 8.2564$.

La valeur observée de T est donc :

$$t_{obs} = \frac{\bar{d}_{obs}}{\sqrt{\frac{s^2_{obs}}{39}}} = \frac{8.2564}{\sqrt{\frac{458.8273}{39}}} = 2.4071$$

Échantillons indépendants

La sortie *R* que vous aurez à analyser pour le test de comparaison pour des échantillons indépendants est :

```
Two-sample z-test
data: A and B
z= -1.553 p-value= 0.1204
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
99 percent confidence interval
-0.7508 0.186
sample estimates:
   mean of A    mean of B
     21.0156       21.298
```

$$H_1 \ : \mu_A < \mu_B \text{ (hypothèse unilatérale)}$$

A and B $\rightarrow \bar{D} = \bar{X}_A - \bar{X}_B$

La *p*-valeur est égale à $p = P_{H_0}(T \leq -1.55) = \frac{2P_{H_0}(T \geq |-1.55|)}{2} = \frac{0.1204}{2} = 0.0602$
$p = 0.0602 \geq \alpha = 0.01$, on ne rejette donc pas H_0.

Échantillons indépendants

Comme pour les échantillons appariés, Calculons la valeur de T à l'aide des calculs suivants (moyenne et écart-type observée) effectués à l'aide de R sans utiliser la valeur affichée sur la sortie R précédente :

```
                    A        B
échantillon 180.0000 100.0000
moyenne      21.0156  21.2980
écart-type    1.7025   1.2923
```

$$s_A = \sqrt{\frac{180}{179}} \times 1.7027 = 1.7074 \quad s_B = \sqrt{\frac{100}{99}} \times 1.2923 = 1.2988$$

$$t_{obs} = \frac{21.0156 - 21.298}{\sqrt{\frac{(1.7074)^2}{180} + \frac{(1.2988)^2}{100}}} = -1.553$$

Intervalles de confiance

En plus de la décision statistique, on donne généralement un intervalle de confiance sur la différence des moyennes.

L'intervalle de confiance à β sur $\mu_1 - \mu_2$ est l'intervalle aléatoire :

$$\left[\bar{D} \pm Q\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\hat{s}\right]$$

où $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$, $Q\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ est le quantile d'ordre $\frac{1+\beta}{2}$ de T et

Échantillons appariés : $\hat{s} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$

Échantillons indépendants : $\hat{s} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Intervalle de confiance

Pour la première étude, la sortie *R* est :

```
Paired z-test
data: PERE and ENFANT
z= -2.4071 p-value= 0.0161
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval
-14.9791 -1.5338
sample estimates:
   mean of PERE    mean of ENFANT
        96.4615          104.7179
```

Intervalle de confiance

A partir de la sortie R précédente, on peut calculer la valeur observée de $\bar{D} = \overline{QI_{PERE}} - \overline{QI_{ENFANT}}$

$$\bar{d}_{obs} = 96.462 - 104.718 = -8.256$$

On en déduit la valeur observée de $\hat{s}$:

$$\hat{s}_{obs} = \frac{\bar{d}_{obs}}{z} = \frac{-8.256}{-2.407} = 3.43.$$

Indiquons que $Q(0.975) = 1.96$ puisque $T \to \mathcal{N}(0,1)$.
Donc, l'intervalle de confiance à 0.95 sur $\mu_{PERE} - \mu_{ENFANT}$ **observé sur l'échantillon** est :

$$\begin{aligned} IC_{0.95}(\mu_{PERE} - \mu_{ENFANT}) &= [-8.256 \pm 1.96 \times 3.43] \\ &= [-8.256 \pm 6.7228] \\ &= [-8.256 - 6.7228, -8.256 + 6.7228] \\ &= [-14.9788, -1.5332] \end{aligned}$$